ECOLE NAVALE *Deuxième composition de mathématiques* (3 h) 1982

EXERCICE N° 1

Dans l'espace affine où l'on travaille, rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on envisage l'ellipsoïde (E) de position variable, et d'équation :

$$(E) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{(z - \sqrt{2}t)^2}{2} = 1,$$ t étant un paramètre réel,

et le point A fixé sur l'axe Ox, d'abscisse $\sqrt{2}$.

1. *Pour* t *fixé*, donner l'équation du plan tangent en un point M quelconque de (E), M ayant pour coordonnées x, y et z. Quelle relation les coordonnées x, y et z de M doivent-elles vérifier afin que le plan tangent en M à (E) contienne le point A ? En déduire que l'ensemble (H) des points M de (E) satisfaisant à cette hypothèse, est situé dans un plan affine (W) dont on donnera l'équation cartésienne.

2. *On suppose encore que* t *est fixé*, l'ensemble (H) est une conique ; afin de déterminer le centre B de celle-ci, on effectue le changement de base suivant : $\vec{K}$ est unitaire et orthogonal au plan (W) contenant (H), avec $\vec{K} \cdot \vec{i} > 0$; $\vec{I} = \vec{j}$ et la base $\{ \vec{I}, \vec{J}, \vec{K} \}$ est orthonormée et directe, on pose :
$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$.

Donner les formules de passage des coordonnées x, y, z aux coordonnées X, Y, Z et réciproquement.

2. *a)* Donner dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ les équations cartésiennes du plan (W) et de l'ellipsoïde (E).

2. *b)* Déduire de la question précédente l'équation de la projection orthogonale de (H) sur le plan (O X Y) ; préciser alors les coordonnées du centre B de (H) dans les repères $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. *c)* Construire le lieu (S) du centre B [dans le plan (Oxz)] lorsque l'on fait varier t de $-\infty$ à $+\infty$.

2. *d)* Soit t_1 la valeur de t correspondant à $x = 1$ et $z > 0$, donner la valeur de t_1 avec 4 décimales et déterminer l'aire limitée par la courbe (S) et les deux droites affines contenant O et les points B_1 et B_2 d'abscisses égales à 1.

EXERCICE N° 2

On envisage l'étude du mouvement (E/*e*) d'un espace affine euclidien orienté (E) par rapport à l'espace affine euclidien orienté (*e*) appelé absolu, on note $(\vec{e})$ l'espace vectoriel associé à (*e*), cet espace affine étant rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et (E) au repère cartésien orthonormé direct aussi, $[M(t), \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)]$ défini dans *(e)* par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = ae^t(\cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j}), \qquad \vec{I}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{\| d\overrightarrow{OM}(t) \|},$$

$$\vec{K}(t) = -\cos\alpha \sin(t + \frac{\pi}{4})\, \vec{i} + \cos\alpha \cos(t + \frac{\pi}{4})\, \vec{j} + \sin\alpha\, \vec{k},$$

le temps t décrit $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, a est une constante réelle strictement positive et α est un réel fixé tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1° Exprimer les vecteurs $\vec{I}(t)$ et $\vec{J}(t)$ dans la base $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

2° Déterminer les coordonnées du vecteur de rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ du mouvement de (E) par rapport à *(e)* dans les bases $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ et $\{ \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t) \}$, ainsi que les coordonnées du vecteur vitesse absolue du point M, vecteur noté $\vec{V}(M)$, dans ces deux bases.

3° Préciser la surface (Σ) engendrée par l'axe (Δ) de rotation et de glissement instantanés dans le repère $[M(t), \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)]$.

4° Déterminer la surface (S) engendrée par l'axe (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quelle est la nature de cette surface ? Tracer, pour t parcourant l'intervalle $[0, 2\pi]$, la courbe (H), intersection de (S) par le plan (O, x, y). Que peut-on dire sur le mouvement de (Σ) par rapport à (S) ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail